www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

MATIÈRES À OPTION

MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 heures

(Option générale)

On considère l'équation différentielle :

(1) $$xy' - y^2 + x = 0.$$

La fonction numérique : $x \longrightarrow y(x)$ ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) est dite solution sur l'intervalle I de l'équation (1) si elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si l'on a, pour tout $x \in I$, $xy'(x) - y(x)^2 + x = 0$.

I. Résolution d'une équation associée à (1)

1. On associe à toute fonction y, continue sur un intervalle I ne contenant pas 0, l'équation différentielle :

(2) $$xz' + yz = 0.$$

où z désigne la fonction inconnue.

- Soit $x_0 \in I$. Montrer que la forme générale des solutions de (2) est :

$$z = z_0 \cdot \exp\left[\int_{x_0}^{x} -\frac{y(t)}{t} \cdot dt\right].$$

- Prouver qu'elles ne s'annulent en aucun point de I.
- Prouver que, si y est solution de (1) et z solution de (2) sur I, alors z est solution sur I de l'équation :

(3) $$xz'' + z' - z = 0.$$

- Prouver vice versa que, si z est solution, sur un certain intervalle J, de (3), et si z ne s'annule en aucun point de J, alors :

$$y(x) = -\frac{xz'(x)}{z(x)} \text{ est solution de (1) sur J.}$$

2. Montrer que (3) admet une solution et une seule $F : x \longrightarrow F(x)$ développable en série entière et telle que $F(0) = 1$.

Établir la formule :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}.$$

3. On effectue dans (3) le changement de fonction inconnue défini par $z(x) = u(x)\,F(x)$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par u lorsque z est solution de (3). Intégrer cette équation sur l'intervalle $]0, +\infty[$; établir que l'ensemble des solutions de (3) sur $]0, +\infty[$ est l'espace vectoriel engendré par les fonctions $F(x)$ et $F(x)G(x)$, où G est définie par :

$$G(x) = \int_1^x \frac{dt}{t \cdot F^2(t)}.$$

Quelle est la dimension de cet espace vectoriel ?

4. Étudier le comportement de $G(x)$ quand x, positif, tend vers 0.

Montrer que l'ensemble des solutions de (3) sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel. Quelle en est la dimension ?

Tournez la page S.V.P.

II. Détermination de la plus grande racine de F

1. On pose, pour :

$$n \in \mathbb{N}^*, \qquad F(x) = S_n(x) + R_n(x) \qquad \text{où} \qquad S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_k(x)$$

avec $u_k(x) = \dfrac{x^k}{(k!)^2}$ et on suppose $x \in [-2, 0]$.

Étudier les signes de $v_p = u_{2p} + u_{2p+1}$, $w_p = u_{2p+1} + u_{2p+2}$.

En déduire le signe de $R_n(x)$ suivant la parité de n.

2. Établir pour $x \in [-2, 0]$, l'encadrement : $1 + x < F(x) < 1 + x + \dfrac{x^2}{4}$.

En déduire que $F(x)$ s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]-2, -1[$.

3. Écrire le développement en série entière de $F'(x)$ et déterminer le signe de $F'(x)$ dans l'intervalle $]-2, -1[$.
Montrer que F admet exactement une racine, notée x_0, dans cet intervalle.

4. Représenter la fonction : $x \longrightarrow S_3(x)$ sur $]-2, -1[$ en prenant comme unités 5 cm sur Ox et 10 cm sur Oy.
Donner un majorant de l'erreur commise en remplaçant F par S_3 sur cet intervalle, puis calculer x_0 à 10^{-1} près.
Calculer x_0 à 10^{-2} près, en justifiant les calculs.

5. Montrer que la fonction définie sur :

$$J =]x_0, +\infty[\text{ par} \qquad Y(x) = \frac{-x F'(x)}{F(x)}$$

est solution de (1). Montrer que Y admet au voisinage de O des développements limités de tous ordres et écrire le développement limité d'ordre 3.

6. Écrire les conditions (C) auxquelles doit satisfaire la suite (a_n) pour que la somme de la série entière

$\sum_{n \in N} a_n x^n$ soit solution de (1).

7. Déduire des conditions (C) le signe de a_n en fonction de n et prouver que $|a_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$.

8. Prouver que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ a un rayon de convergence R supérieur ou égal à 1.

En déduire un intervalle I sur lequel la fonction $Y_1 : x \longrightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ est solution de (1), et donner son développement limité d'ordre 3 au voisinage de O.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail